IV. Racines nièmes d'un nombre complexe

Définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine nième du nombre complexe Z, tout nombre complexe z vérifiant : $z^n = Z$.

Remarques

- Si Z = 0 alors ($z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$) $\Rightarrow$ 0 est l'unique racine nième de 0.
- Si $Z \in \mathbb{C}^*$ alors Z = [ρ, θ]

  Z admet exactement n racines nièmes distinctes $z_k = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$, $k \in \{0,1,....,n-1\}$

Exemples

- Déterminer les racines quatrièmes de $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$. Représenter les points images des solutions dans $P\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$
- Déterminer les racines cubiques de l'unité

Remarques

Soit Z = [ρ, θ], n ≥ 2 et $z_k = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$, $k \in \{0,1,....,n-1\}$

- $OM_k = \sqrt[n]{\rho} \Leftrightarrow M_k \in \zeta_{(O,\ \sqrt[n]{\rho}\ )}$
- $\left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) \equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$

  Ainsi : les points images respectifs des n racines nièmes d'un nombre complexe non nul Z = [ρ, θ] sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle $\zeta_{(O,\ \sqrt[n]{\rho}\ )}$

- La somme des n racines nièmes de l'unité est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$
- On obtient toutes les racines nièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'elles successivement par les racines nièmes de l'unité.

Exercice

Calculer $(2 + i)^3$. En déduire les racines cubiques de Z = 2 + 11i.

Exercice 24 page 33.